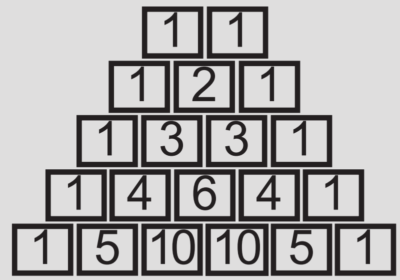
VĚŽ Z LICHÝCH ČÍSEL

(ALGEBRA)

Pascalův trojúhelník je slavné uspořádání čísel do trojúhelníku, kde každé číslo na dolním řádku je součtem dvou čísel nacházejících se v řádku přímo nad ním.

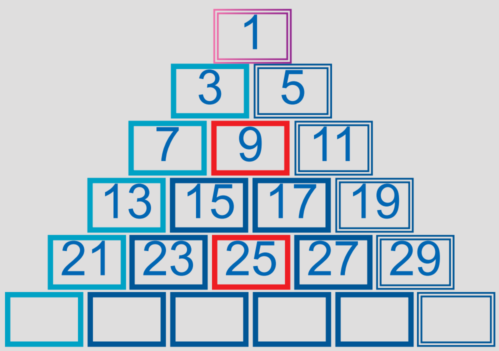
Pascalův trojúhelník



Mezi některé vlastnosti Pascalova trojúhelníku patří:

*Druhá diagonála je tvořena přirozenými čísly 1, 2, 3, 4, 5...
*Třetí diagonála je tvořena trojúhelníkovými čísly 1, 3, 6, 10...
*Součet řad odpovídá mocninám čísla dvě: 2, 4, 8, 16, 32...

Prostudujeme si vlastnosti jiné pyramidy a najdeme odpovědi na následující otázky:

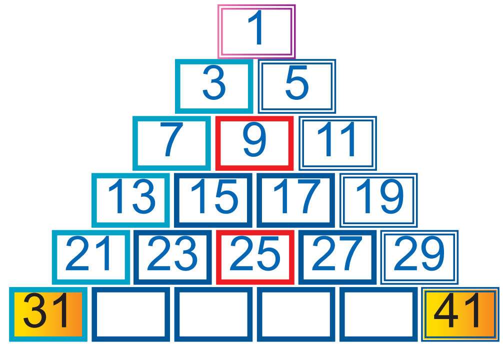


1. Čísla kolikáté řady dají dohromady součet 29 791?

2. Jaké číslo je na 6. pozici na diagonále (1, 3, 7, 13, 21...)? A co 100. pozice?
Jaký je matematický vzorec této diagonály?

3. Jaké číslo je na 6. pozici na diagonále (1, 5, 11, 19, 29...)? A co 100. pozice?
Jaký je matematický vzorec této diagonály?

4. Jaké číslo je uprostřed 7. řady? Jaký je matematický vzorec střední řady?



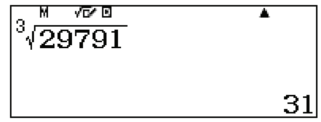
1.......

Posloupnost odpovídající součtu řádků je:

1, 3+5=**8**, 7+9+11=**27**, 13+15+17+19=**64**...

Je vidět, že se jedná o posloupnost třetích mocnin přirozených čísel: 1^3, 2^3, 3^3, 4^3, n^3.

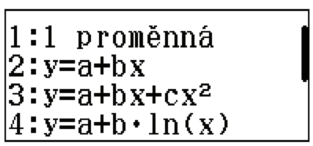
Tedy řada, jejichž čísla dávají součet 29 791, se vypočítá takto:

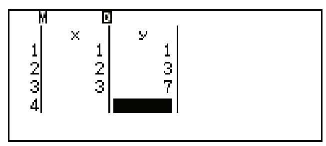


2.......

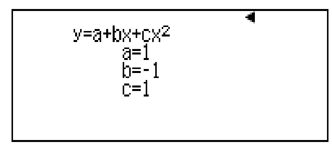
Můžeme vypočítat obecný vzorec pro diagonálu (1, 3, 7, 13, 21...), když přejdeme do nabídky Statistika a vybereme kvadratickou regresi. Postačí zadat první tři čísla.

[3]

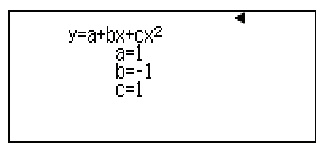




[AC] [OPTN] [3]

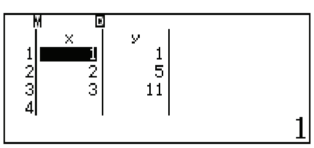


Tedy, obecný vzorec posloupnosti je $b_n=n^2-n+1$.
6. člen je 6^2-6+1=31 a 100. člen je:

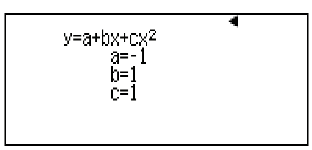


3.......

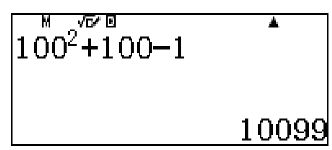
Pomocí kvadratické regrese v nabídce Statistika můžeme vypočítat obecný vzorec diagonály (1, 5, 11, 19, 29...)



[AC] [OPTN] [3]



Obecný vzorec je $c_n=n^2+n-1$.
6. člen je 6^2+6-1=41
a 100. člen je:



4.......

1	*3*	*5*	*7*	*2n-1*
1	*9*	*25*	*49*	$(2n-1)^2$

FINANČNÍ ÚVAHY
(ARITMETIKA)

JEDNODUCHÝ A SLOŽENÝ ÚROK

Jednoduchý úrok, I, je finanční částka získaná investováním počáteční částky nazvané kapitál (C) na pevně stanovenou dobu (t) při stanovené úrokové sazbě (r).

$$I_{(annual)} = \frac{C \bullet r \bullet t}{100}$$

Když je částka I reinvestována, tedy přidána k původnímu kapitálu, používáme termín složený úrok.

$$C_n = C_0\left(1 + \frac{i}{100}\right)^t$$

1. Vypočítejte, jaký úrok získáte, když uložíte do banky částku 20.000 € na čtyři roky při jednoduché úrokové míře 2,75 %. Co kdyby banka nabídla sazbu 2,75 % ročně na 4 roky jako složený úrok? Jak by se investice vyvíjela v průběhu 4 let?

2. Obchodník založil zahraniční společnost na Panenských ostrovech, aby nemusel platit daně a vydělal více peněz. Investoval 3 miliony € a banka na Panenských ostrovech mu nabídla složený úrok 5 % ročně na období 10 let.

Využil program daňové amnestie ve své zemi, přiznal své výnosy a zaplatil 10% pokutu. Kolik peněz mu zůstalo poté, co zaplatil pokutu? O kolik mu vzrostl jeho kapitál ve srovnání s jeho počáteční investicí?

1.......

Abychom si operace usnadnili, uložíme si počáteční kapitál ve výši 20000 do proměnné C v paměti kalkulátoru.

2 0 0 0 0 STO (x^{-1})

```
1:Výpočty
```

```
20000→C
                20000
```

Jednoduchý úrok získaný po 4 letech:

$C\times\frac{2,75}{100}\times 4$

```
                 2200
```

Složený úrok získaný po 4 letech:

$C\times\left(1+\frac{2,75}{100}\right)^4$

```
          22292,42519
```

Abychom zjistili, jak se kapitál vyvíjel v průběhu 4 let, nejjednodušší je použít režim Tabulka hodnot.

```
3:Tabulka hodnot
```

$f(x)=C\times\left(1+\frac{2,75}{100}\right)^x$

```
Rozsah tabulky
 Začát:1
 Konec:4
 Krok :1
```

	x	$f(x)$
1	1	20550
2	2	21115
3	3	21695
4	4	22292

```
          22292,42519
```

Když se podíváme na tabulku, vidíme, že za první rok byl úrok 550 € (což se rovná jednoduchému úroku za rok), ale od druhého roku dále úrok stoupal, protože úrok z předchozích let byl vždy připsán ke kapitálu.

2.......

Abychom si operaci usnadnili, uložme si počáteční kapitál, roční úrok a x počet roků do paměti proměnných.

```
3000000→C
            3 000 000
```

```
Ans→B
                 1/20
```

```
10→x
                   10
```

Po 10 letech měl obchodník na svém účtu 4,89 mil. €.

```
C(1+B)^x
         4 886 683,88
```

Pokud zaplatil 10 % z celkové částky jako pokutu, zůstalo mu 4,4 mil. €.

```
Ans×0,9
        4 398 015,492
```

Jeho kapitál vzrostl přibližně 1,5krát ve porovnání s jeho počáteční investicí.

```
Ans÷C
        1,466 005 164
```

Měření délky poledníku Země

(ARITMETIKA)

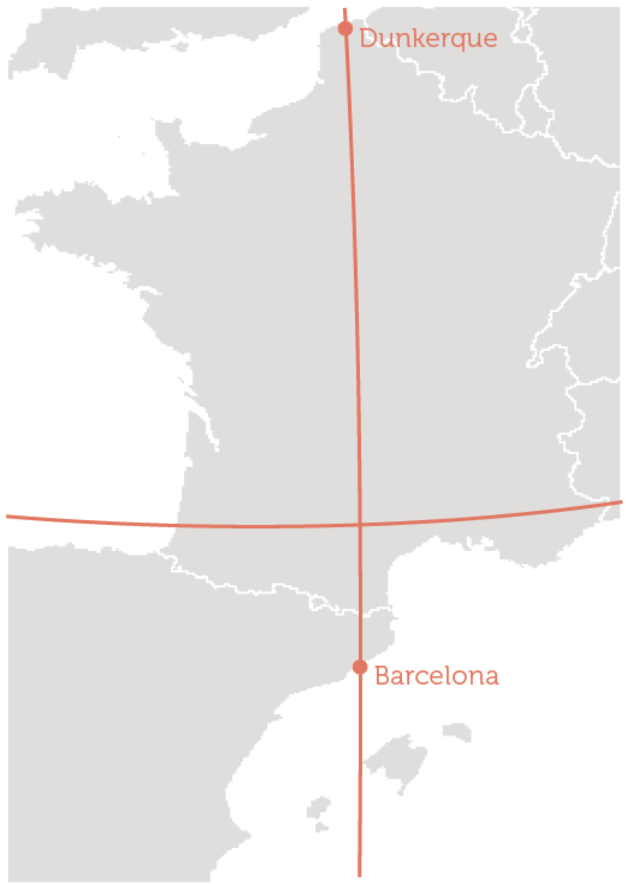
25. června 1792 začali Pierre Mechain a Jean-Baptiste Delambre pracovat na určení délky poledníku, který prochází Paříží.

Bylo to na žádost Pařížské akademie věd, která navrhla používat k měření délky novou jednotku: metr, který byl tehdy definován jako jedna deseti milióntina kvadrantu poledníku Země.

Vzhledem k tomu, že nebylo možné změřit celý poledník od severního pólu k rovníku, bylo rozhodnuto změřit jen jeho určitou část a pak celkovou délku vypočítat.

Částí poledníku, kterou akademie vybrala pro tento projekt, byl oblouk mezi městy Dunkerque (zeměpisná šířka N 51°2′9,20″) a Barcelona (zeměpisná šířka N 41°21′44,95″).

Francouzští astronomové a geodeti se pokoušeli určit na základě triangulačních technik délku oblouku mezi těmito dvěma místy, která se nachází na zmíněném poledníku.



1. Co myslíte, k jakému přibližnému výsledku dospěli?

Poznámka: Předpokládejme, že Země je kulatá planeta s poloměrem R = 6 370 km, délka oblouku na obvodu pak je $L = 2\pi R \frac{n}{360°}$

2. Porovnejte získaný výsledek s hodnotou uvedenou v Google Maps.

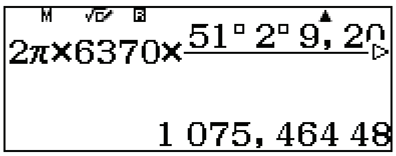
1.......

Můžeme předpokládat, že Dunkerque a Barcelona mají stejnou zeměpisnou délku, a proto leží na stejném poledníku.

V takovém případě lze vypočítat vzdálenost mezi oběma místy takto:

$$L = 2\pi * 6370 * \frac{51°2'9{,}20'' - 41°21'44{,}95''}{360°}$$

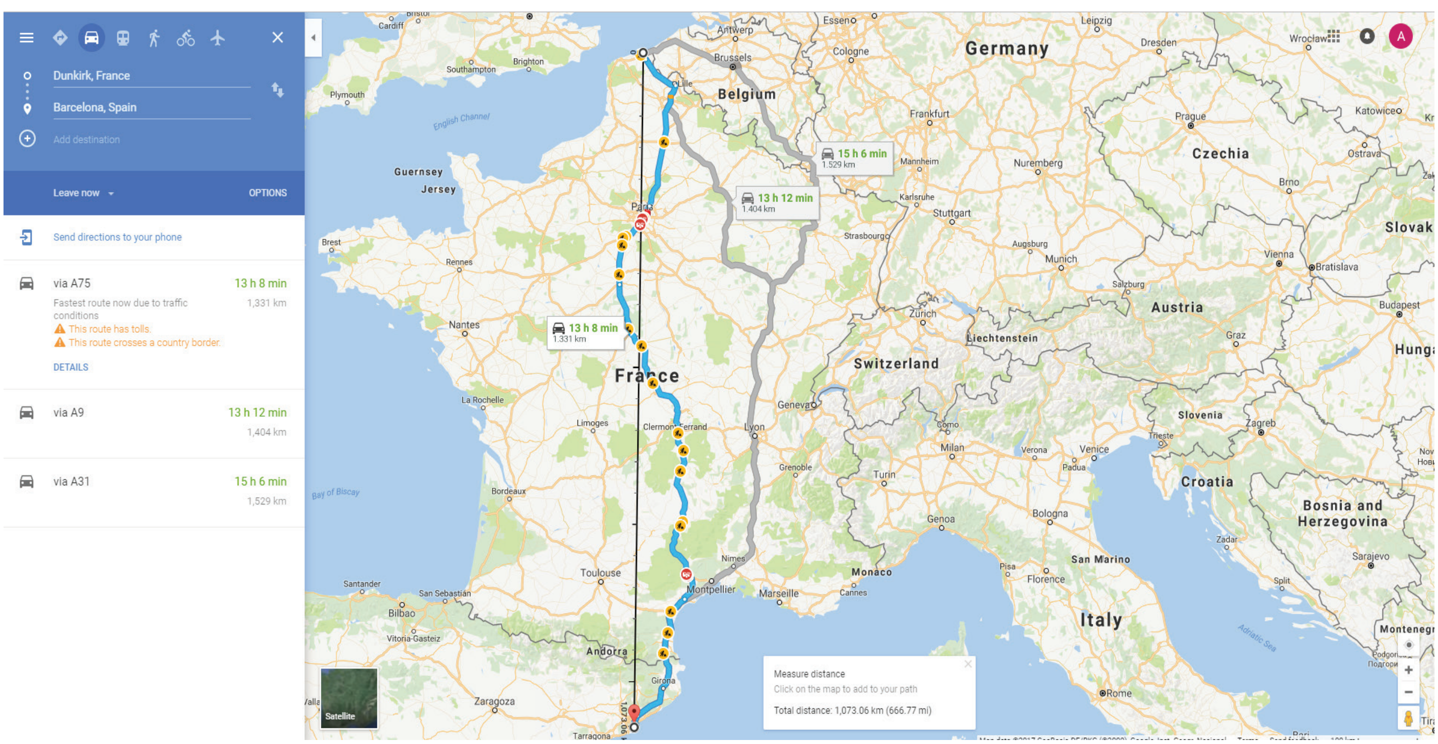
Výše uvedený výpočet můžete provést na kalkulátoru, když použijete klávesu



2.......

Přibližná vzdálenost mezi těmito městy je 1 075 km.

Když použijeme francouzskou dálnici A75, je vzdálenost mezi dvěma centry měst rovna 1 331 km. Pokud bychom však měřili vzdálenost vzdušnou čarou, dostali bychom výsledek 1 073 km, což je hodnota velmi blízká teoretickému výpočtu.



Hrajeme si s dodekaedry

(STATISTIKA)

Prohlédněte si dodekaedry na obrázku. Kolik stěn mají? Jak se jmenují mnohoúhelníky, které tvoří stěny? Co je to pravidelný mnohostěn? Jaké pravidelné mnohostěny znáte? Jaké vztahy existují mezi hranami, stěnami a vrcholy?

1. Rozdělte třídu do skupin, každá skupina hodí celkem 50krát dodekaedrem. Požádejte členy skupiny, aby společně sestavili následující tabulku.

Stěna	Absolutní četnost	Relativní četnost
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		
12		
Celkem		

Absolutní četnost je počet pozorování dané hodnoty, označuje se písmenem F s dolním indexem F_i. Abychom mohli porovnávat data ve dvou situacích s různým počtem pozorování, můžeme zavést pojem relativní četnost, který je definován jako poměr mezi absolutní četností a počtem pozorování. Ta se označuje jako f_i.

2. Vytvořme si dva sloupcové grafy znázorňující absolutní četnosti a relativní četnost. Pozorujte rozdíly a podobnosti.

3. Jaký je průměr ze získaných pozorování v každé skupině?

4. Jak se průměry liší mezi skupinami?

5. Jaký je průměr za celou třídu?

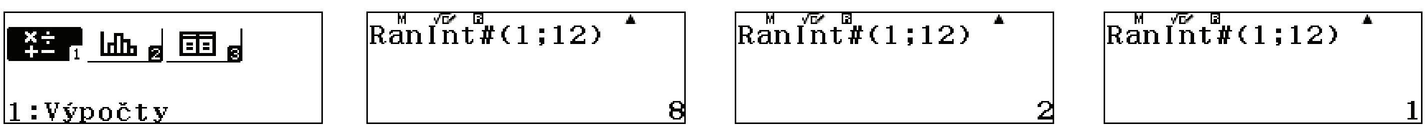
6. Jak je na tom průměr třídy ve srovnání s teoretickou hodnotou?

Nemáte-li k dispozici skutečné dodekaedry, můžete použít funkci Náhodný integer na kalkulátoru FX-82CEX.
Pro seskupení výsledků za všechny studenty doporučujeme použít on-line aplikaci CASIO EDU+.

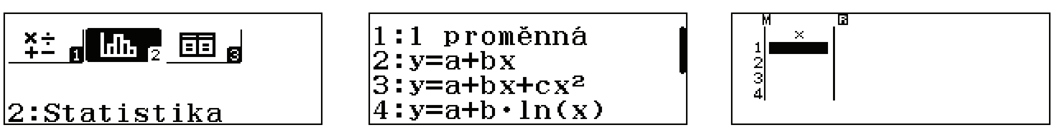
Tato aktivita je experimentální, proto následující tabulka obsahuje pouze příklad výsledků za třídu.

Stěna	Skupina 1		Skupina 2		Skupina 3		Skupina 4		Třída	
x_i	F_i	f_i	F_i	f_i	F_i	f_i	F_i	f_i	F_i	f_i
1	4	0,08	4	0,08	3	0,06	5	0,10	16	0,08
2	2	0,04	1	0,02	5	0,10	1	0,02	9	0,045
3	6	0,12	4	0,08	4	0,08	6	0,12	20	0,10
4	4	0,08	0	0,00	3	0,06	5	0,10	12	0,06
5	7	0,14	2	0,04	5	0,10	3	0,06	17	0,085
6	2	0,04	8	0,16	6	0,12	3	0,06	19	0,095
7	9	0,18	6	0,12	3	0,06	7	0,14	25	0,125
8	2	0,04	7	0,14	7	0,14	1	0,02	17	0,085
9	4	0,08	5	0,10	4	0,08	5	0,10	18	0,09
10	2	0,04	3	0,06	3	0,06	6	0,12	14	0,07
11	4	0,08	6	0,12	3	0,06	3	0,06	16	0,08
12	4	0,08	4	0,08	4	0,08	5	0,10	17	0,085
Celkem	50	1	50	1	50	1	50	1	200	1

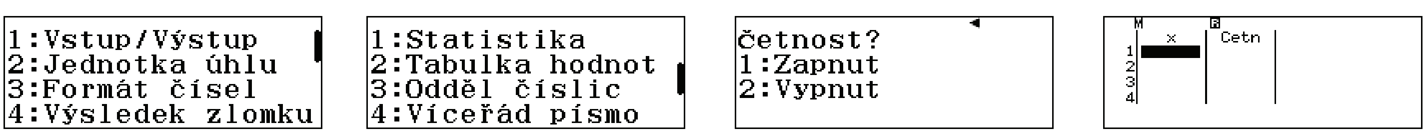
Nemáte-li k dispozici skutečné dodekaedry, můžete použít funkci Náhodný integer po stisknutí tlačítka [ALPHA] [•]. Protože potřebujeme simulovat čísla mezi 1 a 12, musíme tato čísla zadat do kalkulátoru: [1] [ALPHA] [)] [1] [2].
Vždy, když stiskneme klávesu [=], bude vygenerováno nové číslo.



Chcete-li si data zobrazit ve sloupcových grafech, zadejte je do režimu Statistika.
Zvolte 1 proměnná.

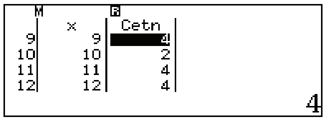


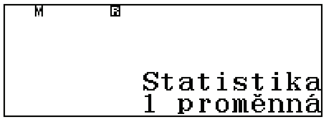
Abyste přidali tabulku četností, změňte nastavení v nabídce NASTAVENÍ.
Zvolte Statistika, Četnost Zapnut.

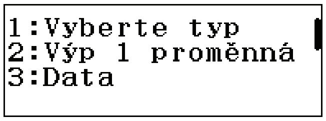


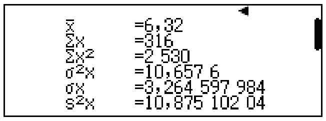
Když každá skupina zadá data ve statickém režimu, bude výpočet průměru snadný.

AC OPTN 2









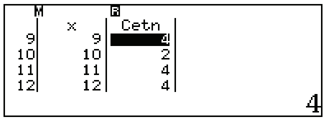
Chcete-li vypočítat průměr za třídu, musí být kombinované četnosti za všechna data zadány do režimu Statistika kalkulátoru.

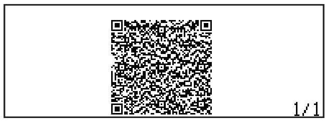
Průměry za každou skupinu a průměr za třídu jsou následující:

Skupina 1	Skupina 2	Skupina 3	Skupina 4	Průměr za třídu
6,32	7,26	6,44	6,66	6,67

Pomocí funkce QR Code a aplikace CASIO EDU+ mohou být data zadaná v režimu Statistika zobrazena pro každou skupinu absolutních a relativních četností.

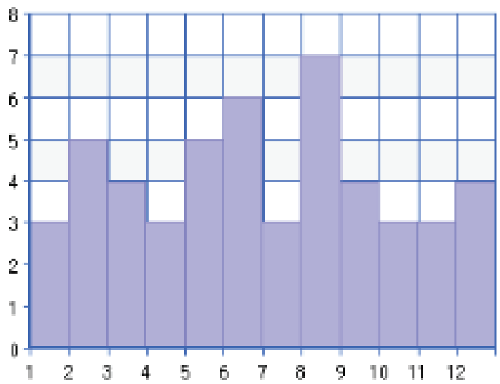
Aby se zobrazily grafy, po zadání dat stiskněte SHIFT OPTN.



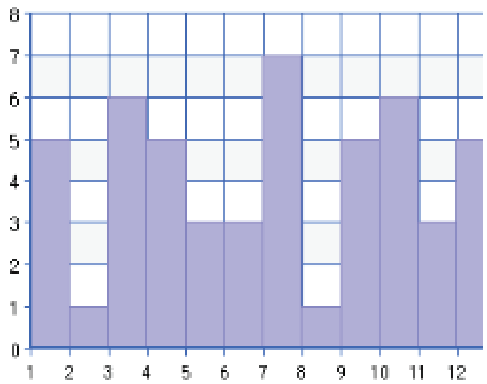


Naskenujte QR kód pomocí aplikace CASIO EDU+ a přejděte na webovou stránku.
Objeví se podobné grafy, jako jsou uvedeny níže.

Skupina 3



Skupina 4



Aplikace umožňuje kombinovat četnosti a kreslit sloupcový graf, který odpovídá zkušenostem získaným jednotlivými skupinami. Pro zkombinování grafu klikněte na ikonu v horním levém rohu grafu, potom klikněte na tlačítko Kombinovat.