

# Zkoumání vodorovného posunu paraboly

- Zpracováno na základě výukového materiálu připraveného Stephenem Sproulem ze St. John's College.

## Úvod

Vývoj vědeckých kalkulátorů významně přispívá k výuce matematiky. V souvislosti s pokrokem v oblasti vědeckých kalkulátorů, jako je nová řada Casio Classwiz, mohou učitelé matematiky tuto technologii využívat jako učební nástroj, a ne pouze jako výpočetní zařízení.

## Poznámky pro učitele

Toto cvičení se zabývá zkoumáním vodorovného posunu parabolické funkce,  $f(x) = \pm(x \pm p)^2 \pm q$ .

Je součástí řady cvičení zabývajících se zkoumáním vodorovného a svislého posunu hyperboly, paraboly a grafu exponenciální funkce.

### Předběžné znalosti:

Studenti by měli nakreslit několik parabol jako grafů funkce  $f(x) = x^2$ . Studenti nemusí používat vlastnosti paraboly k nakreslení grafu. Při této aktivitě použijí funkci tabulky k nakreslení grafu.

### Role kalkulátoru:

Požadovat po studentech, aby opakovaně vyplňovali tabulku funkce, může být těžkopádné a vzhledem k počtu výpočtů by se tím také mohl ztrácet cenný výukový čas. Kalkulátor zlepšuje časovou efektivitu této aktivity a omezuje chyby při výpočtu a poskytuje tak lepší přístup ke skutečnému zkoumání.

Vybavení: kousek pauzovacího papíru 10 x 10 cm

## Cvičení

- Níže zmíněné pracovní listy se dodávají v sadách po čtyřech kusech. Jednotlivé pracovní listy vypadají velmi podobně, ale funkce, které podle nich mají studenti nakreslit, se liší.
- Rozdělte třídu na skupiny po 3 nebo 4 studentech.
- Dejte každému studentovi ze skupiny samostatný list ze sady a kousek pauzovacího papíru. Tedy, každý student ve skupině bude kreslit jiný posun paraboly.
- Studenti splní kroky 1-8 samostatně. Použijí při tom režim kalkulátoru TABULKA. I když se většina studentů naučí používat tento režim rychle, pokyny pro zadání funkce v režimu tabulky jsou uvedeny níže. Doporučuji, aby každý člen skupiny nakreslil svůj přidělený graf jinou barvou a potom graf označil rovnicí příslušné funkce.
- V tomto okamžiku obvykle třídu zastavím a zeptám se studentů na odhad, co by mohla změna v rovnici udělat s grafem funkce.
- Skupiny pak splní kroky 9-11 společně. Při diskusi ve skupině se studenti zaměří na porovnávání transformace grafů a na to, jaké matematické jevy v rovnici funkce způsobily tuto transformaci.
- Závěry (kroky 12-15) mohou být vyplněny individuálně, ve skupinách nebo v diskusi v rámci celé třídy.

## Další diskuse ve třídě

- a) Prodiskutujte skutečnost, že graf funkce existuje i pro hodnoty, které nejsou uvedeny v tabulce, jak pro reálná čísla mezi použitými celými čísly, tak pro čísla až do nekonečna.
- b) Jaké tabulky hodnot byste dali někomu, kdo by chtěl nakreslit graf funkce  $f(x) = (x + 11)^2$  ?
- c) Jaké tabulky hodnot byste dali někomu, kdo by chtěl nakreslit graf funkce  $f(x) = (x - 5)^2$  ?
- d) Jaké tabulky hodnot byste dali někomu, kdo by chtěl nakreslit graf funkce  $f(x) = (x + 11)^2 + 2$  ?
- e) Jak byste mohli nakreslit od ruky „posunutou parabolu“, aniž byste použili tabulku hodnot?

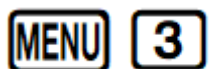
## Závěr

Při počítačovém zkoumání transformace grafů studenti mají tendenci vidět „pohyb“ grafu, ale potřebují speciální nasměrování učitelem, aby věnovali dostatečnou pozornost matematickým podrobnostem transformace. Například, studenti vidí vodorovný posun, ale nechápou rozdíl mezi  $y = (x - 3)^2$  a  $y = (x + 3)^2$ . Studenti se vyjádřili, že se naučili více, když jev zkoumali s použitím kalkulátoru Casio, pauzovacího papíru a řízené skupinové diskuse.

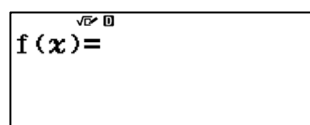
# Zadání hyperbolické funkce na kalkulátoru Casio fx-82CEX.

## Akce

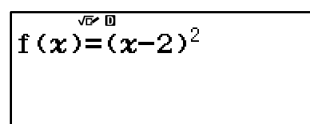
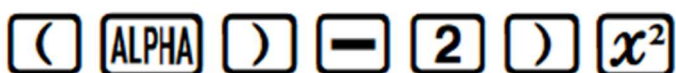
Nastavení režimu



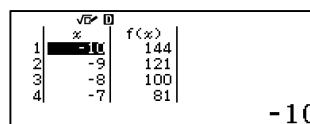
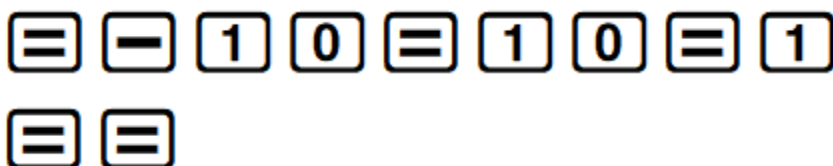
## Výsledná obrazovka



Zadání funkce



Nastavení rozsahu



## Zkoumání funkce $y = f(x) = \pm(x \pm p)^2 \pm q$ – student 1

### Kroky

1. Graf funkce  $f(x) = x^2$  je nakreslen v souřadné soustavě níže.
2. Podívejte se na graf v souřadné soustavě a odhadněte, jak by asi mohl vypadat graf funkce  $f(x) = (x - 4)^2$ .
3. Na kalkulátoru Casio fx-82CEX zadejte  $f(x) = (x - 4)^2$  jako funkci (viz postup na straně 3).
4. Vyplňte tabulku pro  $f(x) = (x - 4)^2$ , použijte k tomu kalkulátor (y uveďte s přesností na 1 desetinné místo):

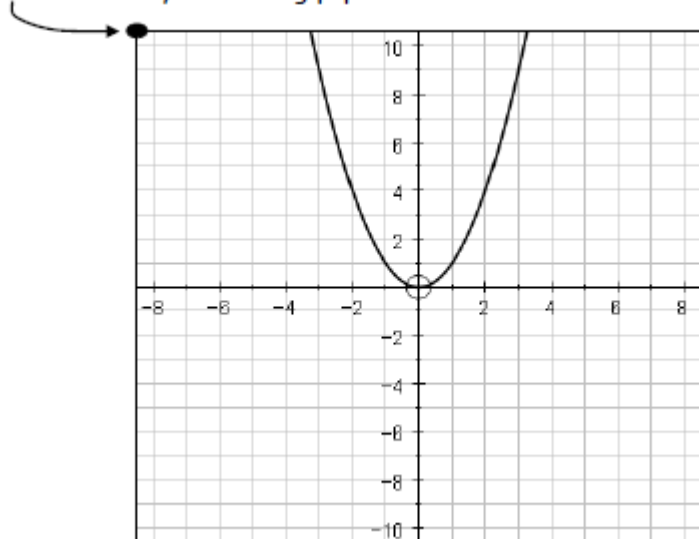
x	Začátek? 1	2	3	4	5	6	Konec? 7
$f(x) = (x - 4)^2$							

5. Vysvětlete, proč je graf funkce osově souměrný dle přímky v bodě  $[4,0]$  kolmé k ose x?

- 
6. Položte pauzovací papír na souřadný systém.

7. Vyneste body  $(x,y)$  z tabulky na pauzovací papír a nakreslete náčrt grafu funkce  $f(x) = (x - 4)^2$ .

Place the corner of your tracing paper here



8. Porovnejte svůj graf s vytištěným grafem. (Co je stejné? Co je jiné?)

---

Posbírejte grafy z celé své skupiny. Položte je na sebe na souřadný systém (nezapomeňte vždy umístit levý horní roh papíru na tečku). S pomocí více grafů odpovězte na následující otázky.

9. Porovnejte sadu grafů s vytištěným grafem.

---

10. Uveďte souřadnice minima resp. maxima grafu:

---

11. Porovnejte vaši tabulku s tabulkami dalších členů vaší skupiny. Proč máte každý jinou tabulku?

## Závěry

12. Má graf nějakou svislou nebo vodorovnou asymptotu? \_\_\_\_\_

13. Uveďte souřadnice minima resp. maxima grafu  $f(x) = \pm(x \pm p)^2 \pm q$  \_\_\_\_\_

14. V grafu funkce  $f(x) = \pm(x \pm p)^2 \pm q$  parametry  $p$ ,  $q$  a znaménka plus minus mění graf následujícím způsobem:

## Zkoumání funkce $y = f(x) = \pm(x \pm p)^2 \pm q$ – student 2

### Kroky

1. Graf funkce  $f(x) = x^2$  je nakreslen v souřadné soustavě níže.
2. Podívejte se na graf v souřadné soustavě a odhadněte, jak by asi mohl vypadat graf funkce  $f(x) = (x + 4)^2$ .
3. Na kalkulátoru Casio fx-82CEX stiskněte klávesu w a zadejte  $f(x) = (x + 4)^2$  jako funkci (viz postup na straně 3).
4. Vyplňte tabulku pro  $f(x) = (x + 4)^2$ , použijte k tomu kalkulátor (y uveďte s přesností na 1 desetinné místo):

x	Začátek? -7	-6	-5	-4	-3	-2	Konec? -1
$f(x) = (x + 4)^2$							

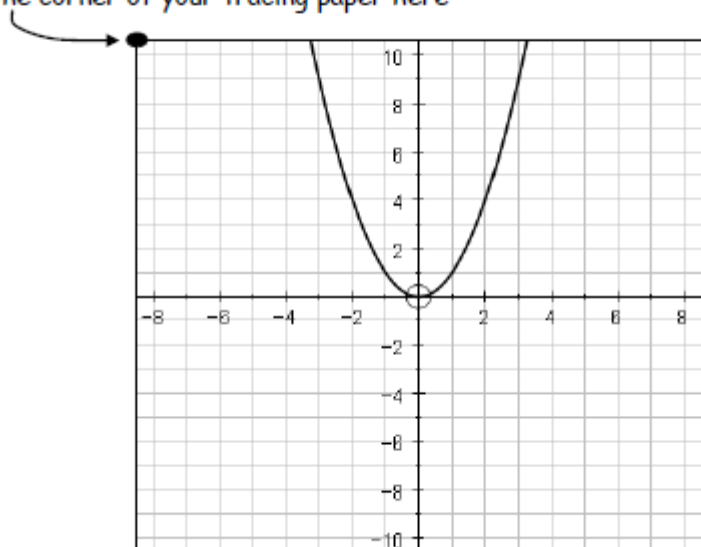
5. Vysvětlete, proč je graf funkce osově souměrný dle přímky v bodě  $[-4,0]$  kolmé k ose x?
6. :

---

7. Položte pauzovací papír na souřadný systém.

8. Vyneste body  $(x,y)$  z tabulky na pauzovací papír a nakreslete náčrt grafu funkce  $f(x) = (x + 4)^2$ .

Place the corner of your tracing paper here



9. Porovnejte svůj graf s vytištěným grafem. (Co je stejné? Co je jiné?)

---

Posbírejte grafy z celé své skupiny. Položte je na sebe na souřadný systém (nezapomeňte vždy umístit levý horní roh papíru na tečku). S pomocí více grafů odpovězte na následující otázky.

10. Porovnejte sadu grafů s vytištěným grafem.

---

11. Uveďte souřadnice minima resp. maxima grafu:

---

12. Porovnejte vaši tabulku s tabulkami dalších členů vaší skupiny. Proč máte každý jinou tabulku?

## Závěry

13. Má graf nějakou svislou nebo vodorovnou asymptotu? \_\_\_\_\_

14. Uveďte souřadnice minima resp. maxima grafu  $f(x) = \pm(x \pm p)^2 \pm q$  \_\_\_\_\_

15. V grafu funkce  $f(x) = \pm(x \pm p)^2 \pm q$  parametry  $p$ ,  $q$  a znaménka plus minus mění graf následujícím způsobem:

## Zkoumání funkce $y = f(x) = \pm(x \pm p)^2 \pm q$ – student 3

### Kroky

1. Graf funkce  $f(x) = x^2$  je nakreslen v souřadné soustavě níže.
2. Podívejte se na graf v souřadné soustavě a odhadněte, jak by asi mohl vypadat graf funkce  $f(x) = (-x + 4)^2$ .
3. Na kalkulátoru Casio fx-82CEX stiskněte klávesu w a zadejte  $f(x) = (-x + 4)^2$  jako funkci (viz postup na straně 3).
4. Vyplňte tabulku pro  $f(x) = (-x + 4)^2$ , použijte k tomu kalkulátor (y uveďte s přesností na 1 desetinné místo):

x	Začátek? 1	2	3	4	5	6	Konec? 7
$f(x) = (-x + 4)^2$							

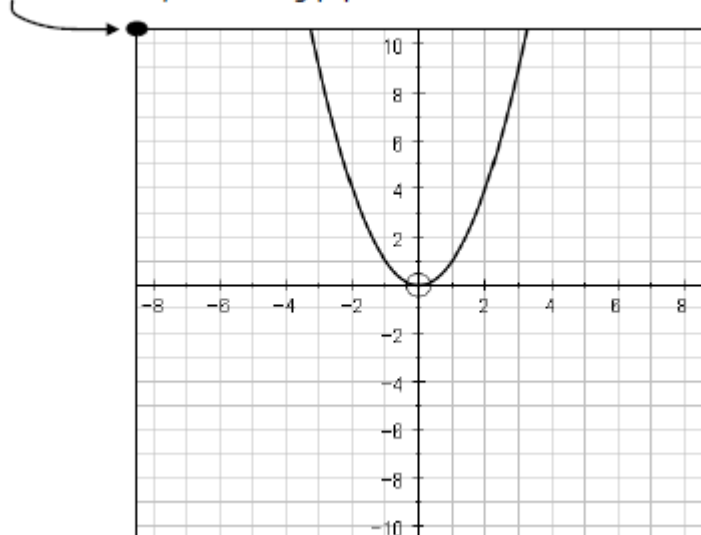
1. Vysvětlete, proč je graf funkce osově souměrný dle přímky v bodě [4,0] kolmé k ose x?

---

5. Položte pauzovací papír na souřadný systém.

6. Vyneste body (x,y) z tabulky na pauzovací papír a nakreslete náčrt grafu funkce  $f(x) = (-x + 4)^2$ .

Place the corner of your tracing paper here





7. Porovnejte svůj graf s vytištěným grafem. (Co je stejné? Co je jiné?)

---

Posbírejte grafy z celé své skupiny. Položte je na sebe na souřadný systém (nezapomeňte vždy umístit levý horní roh papíru na tečku). S pomocí více grafů odpovězte na následující otázky.

8. Porovnejte sadu grafů s vytištěným grafem.

---

9. Uveďte souřadnice minima resp. maxima grafu:

---

10. Porovnejte vaši tabulku s tabulkami dalších členů vaší skupiny. Proč máte každý jinou tabulku?

## Závěry

11. Má graf nějakou svislou nebo vodorovnou asymptotu? \_\_\_\_\_

12. Uveďte souřadnice minima resp. maxima grafu  $f(x) = \pm(x \pm p)^2 \pm q$  \_\_\_\_\_

13. V grafu funkce  $f(x) = \pm(x \pm p)^2 \pm q$  parametry  $p$ ,  $q$  a znaménka plus minus mění graf následujícím způsobem:

## Zkoumání funkce $y = f(x) = \pm(x \pm p)^2 \pm q$ – student 4

### Kroky

1. Graf funkce  $f(x) = x^2$  je nakreslen v souřadné soustavě níže.
2. Podívejte se na graf v souřadné soustavě a odhadněte, jak by asi mohl vypadat graf funkce  $f(x) = (-x - 4)^2$ .
3. Na kalkulátoru Casio fx-82CEX stiskněte klávesu w a zadejte  $f(x) = (-x - 4)^2$  jako funkci (viz postup na straně 3).
4. Vyplňte tabulku pro  $f(x) = (-x - 4)^2$ , použijte k tomu kalkulátor (y uveďte s přesností na 1 desetinné místo):

x	Začátek? -7	-6	-5	-4	-3	-2	Konec? -1
$f(x) = (-x - 4)^2$							

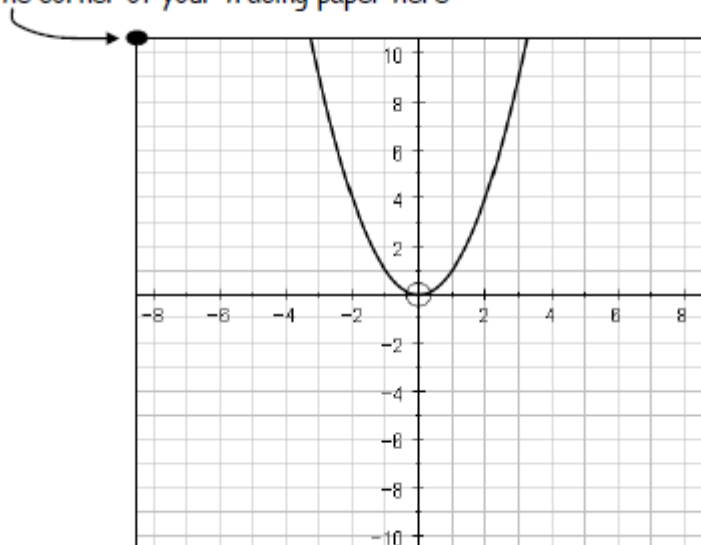
5. Vysvětlete, proč je graf funkce osově souměrný dle přímky v bodě  $[-4,0]$  kolmé k ose x?
6. :

---

7. Položte pauzovací papír na souřadný systém.

8. Vyneste body  $(x,y)$  z tabulky na pauzovací papír a nakreslete náčrt grafu funkce  $f(x) = (-x - 4)^2$ .

Place the corner of your tracing paper here



9. Porovnejte svůj graf s vytištěným grafem. (Co je stejné? Co je jiné?)

---

Posbírejte grafy z celé své skupiny. Položte je na sebe na souřadný systém (nezapomeňte vždy umístit levý horní roh papíru na tečku). S pomocí více grafů odpovězte na následující otázky.

10. Porovnejte sadu grafů s vytištěným grafem.

---

11. Uveďte souřadnice minima resp. maxima grafu:

---

12. Porovnejte vaši tabulku s tabulkami dalších členů vaší skupiny. Proč máte každý jinou tabulku?

## Závěry

13. Má graf nějakou svislou nebo vodorovnou asymptotu? \_\_\_\_\_

14. Uveďte souřadnice minima resp. maxima grafu  $f(x) = \pm(x \pm p)^2 \pm q$  \_\_\_\_\_

15. V grafu funkce  $f(x) = \pm(x \pm p)^2 \pm q$  parametry  $p$ ,  $q$  a znaménka plus minus mění graf následujícím způsobem:

## Zkoumání funkce $y = f(x) = \pm(x \pm p)^2 \pm q$ – student 5

### Kroky

1. Graf funkce  $f(x) = x^2$  je nakreslen v souřadné soustavě níže.
2. Podívejte se na graf v souřadné soustavě a odhadněte, jak by asi mohl vypadat graf funkce  $f(x) = -(x - 4)^2$ .
3. Na kalkulátoru Casio fx-82CEX stiskněte klávesu w a zadejte  $f(x) = -(x - 4)^2$  jako funkci (viz postup na straně 3).
4. Vyplňte tabulku pro  $f(x) = -(x - 4)^2$ , použijte k tomu kalkulátor (y uveďte s přesností na 1 desetinné místo):

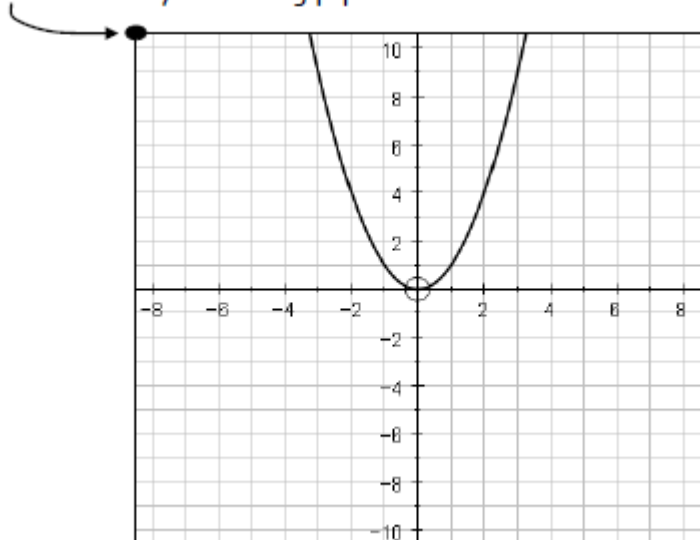
x	Začátek? 1	2	3	4	5	6	Konec? 7
$f(x) = -(x - 4)^2$							

5. Vysvětlete, proč je graf funkce osově souměrný dle přímky v bodě  $[4,0]$  kolmé k ose x?:
- 

6. Položte pauzovací papír na souřadný systém.

7. Vyneste body  $(x,y)$  z tabulky na pauzovací papír a nakreslete náčrt grafu funkce  $f(x) = -(x - 4)^2$ .

Place the corner of your tracing paper here



8. Porovnejte svůj graf s vytištěným grafem. (Co je stejné? Co je jiné?)

---

Posbírejte grafy z celé své skupiny. Položte je na sebe na souřadný systém (nezapomeňte vždy umístit levý horní roh papíru na tečku). S pomocí více grafů odpovězte na následující otázky.

9. Porovnejte sadu grafů s vytištěným grafem.

---

10. Uveďte souřadnice minima resp. maxima grafu:

---

11. Porovnejte vaši tabulku s tabulkami dalších členů vaší skupiny. Proč máte každý jinou tabulku?

## Závěry

12. Má graf nějakou svislou nebo vodorovnou asymptotu? \_\_\_\_\_

13. Uveďte souřadnice minima resp. maxima grafu  $f(x) = \pm(x \pm p)^2 \pm q$  \_\_\_\_\_

14. V grafu funkce  $f(x) = \pm(x \pm p)^2 \pm q$  parametry  $p$ ,  $q$  a znaménka plus minus mění graf následujícím způsobem:

## Zkoumání funkce $y = f(x) = \pm(x \pm p)^2 \pm q$ – student 6

### Kroky

1. Graf funkce  $f(x) = x^2$  je nakreslen v souřadné soustavě níže.
2. Podívejte se na graf v souřadné soustavě a odhadněte, jak by asi mohl vypadat graf funkce  $f(x) = -(-x + 4)^2$ .
3. Na kalkulátoru Casio fx-82CEX stiskněte klávesu w a zadejte  $f(x) = -(-x + 4)^2$  jako funkci (viz postup na straně 3).
4. Vyplňte tabulku pro  $f(x) = -(-x + 4)^2$ , použijte k tomu kalkulátor (y uveďte s přesností na 1 desetinné místo):

x	Začátek? 1	2	3	4	5	6	Konec? 7
$f(x) = -(-x + 4)^2$							

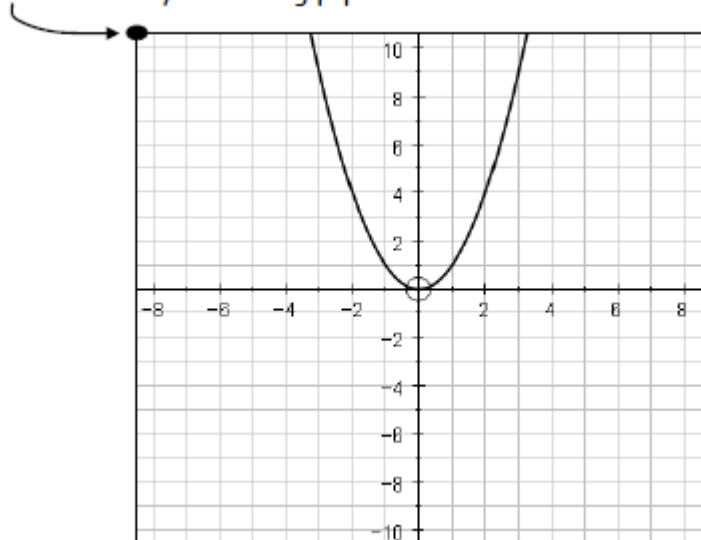
1. Vysvětlete, proč je graf funkce osově souměrný dle přímky v bodě  $[4,0]$  kolmé k ose x?

---

5. Položte pauzovací papír na souřadný systém.

6. Vyneste body  $(x,y)$  z tabulky na pauzovací papír a nakreslete náčrt grafu funkce  $f(x) = -(-x + 4)^2$ .

Place the corner of your tracing paper here



7. Porovnejte svůj graf s vytištěným grafem. (Co je stejné? Co je jiné?)

---

Posbírejte grafy z celé své skupiny. Položte je na sebe na souřadný systém (nezapomeňte vždy umístit levý horní roh papíru na tečku). S pomocí více grafů odpovězte na následující otázky.

8. Porovnejte sadu grafů s vytištěným grafem.

---

9. Uveďte souřadnice minima resp. maxima grafu:

---

10. Porovnejte vaši tabulku s tabulkami dalších členů vaší skupiny. Proč máte každý jinou tabulku?

## Závěry

11. Má graf nějakou svislou nebo vodorovnou asymptotu? \_\_\_\_\_

12. Uveďte souřadnice minima resp. maxima grafu  $f(x) = \pm(x \pm p)^2 \pm q$  \_\_\_\_\_

13. V grafu funkce  $f(x) = \pm(x \pm p)^2 \pm q$  parametry  $p$ ,  $q$  a znaménka plus minus mění graf následujícím způsobem:

## Zkoumání funkce $y = f(x) = \pm(x \pm p)^2 \pm q$ – student 7

### Kroky

1. Graf funkce  $f(x) = x^2$  je nakreslen v souřadné soustavě níže.
2. Podívejte se na graf v souřadné soustavě a odhadněte, jak by asi mohl vypadat graf funkce  $f(x) = (x - 4)^2 + 5$ .
3. Na kalkulátoru Casio fx-82CEX stiskněte klávesu w a zadejte  $f(x) = (x - 4)^2 + 5$  jako funkci (viz postup na straně 3).
4. Vyplňte tabulku pro  $f(x) = (x - 4)^2 + 5$ , použijte k tomu kalkulátor (y uveďte s přesností na 1 desetinné místo):

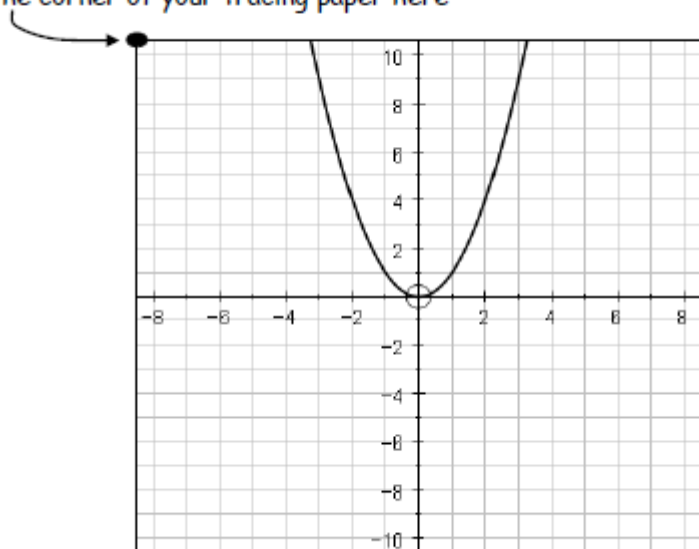
x	Začátek? 1	2	3	4	5	6	Konec? 7
$f(x) = (x - 4)^2 + 5$							

1. Vysvětlete, proč je graf funkce osově souměrný dle přímky v bodě  $[4,0]$  kolmé k ose x?:

- 
5. Položte pauzovací papír na souřadný systém.

6. Vyneste body  $(x,y)$  z tabulky na pauzovací papír a nakreslete náčrt grafu funkce  $f(x) = (x - 4)^2 + 5$ .

Place the corner of your tracing paper here





7. Porovnejte svůj graf s vytištěným grafem. (Co je stejné? Co je jiné?)

---

Posbírejte grafy z celé své skupiny. Položte je na sebe na souřadný systém (nezapomeňte vždy umístit levý horní roh papíru na tečku). S pomocí více grafů odpovězte na následující otázky.

8. Porovnejte sadu grafů s vytištěným grafem.

---

9. Uveďte souřadnice minima resp. maxima grafu:

---

10. Porovnejte vaši tabulku s tabulkami dalších členů vaší skupiny. Proč máte každý jinou tabulku?

## Závěry

11. Má graf nějakou svislou nebo vodorovnou asymptotu? \_\_\_\_\_

12. Uveďte souřadnice minima resp. maxima grafu  $f(x) = \pm(x \pm p)^2 \pm q$  \_\_\_\_\_

13. V grafu funkce  $f(x) = \pm(x \pm p)^2 \pm q$  parametry  $p$ ,  $q$  a znaménka plus minus mění graf následujícím způsobem:

## Zkoumání funkce $y = f(x) = \pm(x \pm p)^2 \pm q$ – student 8

### Kroky

1. Graf funkce  $f(x) = x^2$  je nakreslen v souřadné soustavě níže.
2. Podívejte se na graf v souřadné soustavě a odhadněte, jak by asi mohl vypadat graf funkce  $f(x) = (-x + 4)^2 - 1$ .
3. Na kalkulátoru Casio fx-82CEX stiskněte klávesu w a zadejte  $f(x) = -(x + 4)^2 - 1$  jako funkci (viz postup na straně 3).
4. Vyplňte tabulku pro  $f(x) = -(x + 4)^2 - 1$ , použijte k tomu kalkulátor (y uveďte s přesností na 1 desetinné místo):

x	Začátek? -9	-7	-5	-4	-3	-2	Konec? -1
$f(x) = -(x + 4)^2 - 1$							

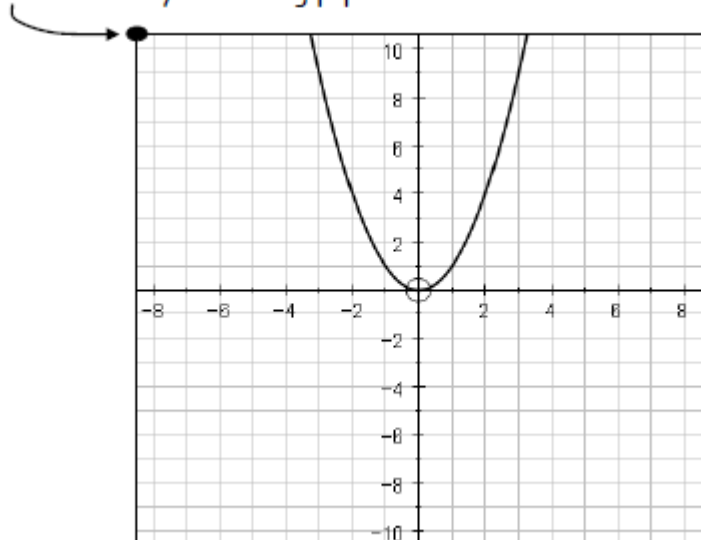
1. Vysvětlete, proč je graf funkce osově souměrný dle přímky v bodě  $[-4,0]$  kolmé k ose x?

---

5. Položte pauzovací papír na souřadný systém.

6. Vyneste body (x,y) z tabulky na pauzovací papír a nakreslete náčrt grafu funkce  $f(x) = -(x + 4)^2 - 1$ .

Place the corner of your tracing paper here



7. Porovnejte svůj graf s vytištěným grafem. (Co je stejné? Co je jiné?)

---

Posbírejte grafy z celé své skupiny. Položte je na sebe na souřadný systém (nezapomeňte vždy umístit levý horní roh papíru na tečku). S pomocí více grafů odpovězte na následující otázky.

8. Porovnejte sadu grafů s vytištěným grafem.

---

9. Uveďte souřadnice minima resp. maxima grafu:

---

10. Porovnejte vaši tabulku s tabulkami dalších členů vaší skupiny. Proč máte každý jinou tabulku?

## Závěry

11. Má graf nějakou svislou nebo vodorovnou asymptotu? \_\_\_\_\_

12. Uveďte souřadnice minima resp. maxima grafu  $f(x) = \pm(x \pm p)^2 \pm q$  \_\_\_\_\_

13. V grafu funkce  $f(x) = \pm(x \pm p)^2 \pm q$  parametry  $p$ ,  $q$  a znaménka plus minus mění graf následujícím způsobem: